AKKOR HÁT MEGISMERHETŐ, VAGY NEM?

A világ megismerhetőségének kérdése a filozófia örök problémája. Mi a világ, az idő, a tér? Volt-e kezdet, van-e jelen, lesz-e vég? Mi a tudás alapja, mik a megismerés módjai, lehetőségei és korlátai? Ilyen és ezekhez hasonló kérdések a kezdetektől fogva foglalkoztatják a gondolkodó embert. *Theaitétosz* ókori görög filozófus szerint a tudás: érzékelés. *Szent Ágoston* ezt a megismerés legalacsonyabb fokának tartja. Számára a megismerés Isten megismerését jelenti. Tanításában Isten felfoghatatlan, de nem leírhatatlan: van valami a teremtett világban, ami alapján fogalmat alkothatunk róla. *Kant* azt szeretné megtudni, hogy hogyan juthatunk tudományos ismeret birtokába, milyen feltételek biztosítják ezt az ismeretet. Szerinte az értelem nem ismerhet meg mindent. *Heidegger* így vélekedik: „Nem tudjuk, hogy a „lét" mit jelent. Ám ha megkérdezzük, hogy „mi a lét?", már benne vagyunk a „van" megértésében anélkül, hogy fogalmilag képesek lennénk rögzíteni, mit is jelent ez."

A fenti idézetek, gondolatok a matematikai észjárás számára túlságosan pontatlanok, nehezen értelmezhetők, kis túlzással definiálatlan fogalmakról való üres fecsegésnek minősülnek. Ám egy nyitott gondolkodású matematikus elme számára világos, hogy a létünkkel és tudásunkkal kapcsolatos alapvető kérdések ennyivel nem intézhetők el, nem söpörhetők ilyen könnyedén félre.

A régi korokban a nagyformátumú gondolkodók nehezen voltak osztályozhatók mai fogalmaink szerinti filozófusokra, természettudósokra, matematikusokra. Legtöbbjükben mindezekből volt valamennyi. Ám az idő múlásával a gondolkodás területén is megindult a szakosodás, ami együtt járt a fogalmak pontosításával, a vizsgálatok különböző részterületekre való leszűkítésével, a kutatási eszközök finomodásával, s – nem utolsósorban – a logikai, ezen belül matematikai logikai módszerek elterjedésével. A legkiválóbb matematikusok számára egyre inkább világossá vált, hogy tudományuk megbízhatóságának érdekében biztos alapokra kell helyezniük a matematika épületét. A XIX. század végén úgy tűnt, hogy a *Cantor* nevéhez fűződő halmazelmélet megnyugtató megalapozást szolgáltat. Ám a XX. század hajnalán viharfelhők kezdtek gyülekezni a matematika egén. Olyan ellentmondásokra derült fény éppen a csodafegyvernek tekintett halmazelmélettel kapcsolatosan, amelyek alapjaiban rengették meg a monumentális építményt. Felbukkant ugyanis egy szörny, amely pontosan akkor rendelkezik azzal a tulajdonsággal, amely őt definiálja, ha nincs meg ez a tulajdonsága! Kiderült, hogy a „halmaz" fogalmának, s bizonyos alapszabályoknak a tisztázása, rögzítése nélkül nincs lehetőség az ellentmondások kiküszöbölésére. Megkezdődött a halmazelmélet, s ezzel párhuzamosan az egész matematika axiomatikus alapokra helyezése.

Mi köze mindennek a világ megismerhetőségével kapcsolatosan felmerülő kérdésekhez? A matematikára szorítkozva a megismerés azt jelenti, hogy egy adott matematikai fogalomról egyre több ismeretet igyekszünk szerezni, egyre több tulajdonságát igyekszünk feltárni, s ilyen fogalmak egymás közti kapcsolatait egyre mélyrehatóbban akarjuk felderíteni. A „világ” számunkra a „matematikai világ”, az "univerzum" pedig matematikai fogalmak összessége. Ezek tulajdonságait, egymáshoz fűződő kapcsolataikat tételek írják le. A tételeket a matematikai logika módszereinek felhasználásával be kell bizonyítani. A bizonyítások valójában „ha..., akkor...” típusú következtetések. Matematikai megismerésünk folyamata tehát ilyen következtetések láncolata, a folyamat célja pedig újabb és újabb tételek bizonyítása. Számunkra a világ megismerhetőségének kérdése tehát valami olyasmit jelenthet, hogy vajon van-e elvi lehetőség a matematikai univerzumunkban fellelhető összes fogalom minden tulajdonságának leírására? Kicsit konkrétabban: bebizonyítható-e minden olyan igaz tétel, ami egy meghatározott fogalommal kapcsolatban megfogalmazható?

Ezen a ponton világossá válik, hogy ilyen lazasággal nem vághatunk bele a munkába. Mi a matematikai univerzum, mi tekinthető matematikai fogalomnak, mikor helyes egy következtetés, mi az, hogy „minden tulajdonság”, mit kell „megfogalmazhatóság” alatt érteni? Újabb és újabb kérdések, melyek megválaszolása nélkül egy tapodtat sem juthatunk előre. Ezt a homályt volt hivatott eloszlatni a matematika axiomatizálása. Mindenekelőtt szükség van egy nyelvre, amelyet minden matematikus megért, szimbólumokra, amelyeket minden matematikus, anyanyelvétől függetlenül ugyanúgy ért, ugyanazokat a jelentéseket érti alattuk, továbbá szükség van néhány, a matematika évezredes történetéből merített tapasztalaton, közmegegyezésen alapuló logikai következtetési szabályra, amelyeket minden matematikus ugyanúgy használ, s melyek szigorú alkalmazásával nyert következtetések helyességét senki nem kérdőjelezi meg. Ezek tehát a matematikai megismerés eszközei, szerszámai. Ezeket matematika feletti, metamatematikai eszközökkel kell rögzíteni, mennyiségüket pedig az áttekinthetőség érdekében szűkre kell szabni. Ám mindezzel még semmit nem kezdhetünk, hiszen nincsenek fogalmaink, s a következtetéseink levonásához nem állnak rendelkezésre mindenki által elfogadott feltételek. Na és a matematika messzi korokba vesző kezdetei óta felhalmozódott fogalmak és ismeretek óriási rendszere? Azt teljesen figyelmen kívül kellene hagynunk? De hiszen pont azok felhasználása vezetett olyan ellentmondásokhoz, amelyekbe majdnem beleroppant az egész katedrális! Ne feledjük: az a matematikai elmélet semmit nem ér, amelyben egy tételt, és ugyanannak a tagadását is be lehet bizonyítani. Egészen egyszerű logikai megfontolásból adódik, hogy egy ilyen elméletben minden állítás igaz – s persze mindegyik hamis is egyben. A világ ilyesfajta „megismeréséből” nem kérünk, bármennyire is vonzónak tűnhet egy olyan tudomány, melynek művelői között fel sem merül késhegyre menő viták lehetősége, hiszen mindenkinek mindig igaza van... A fentebb említett szerszám- és eszközkészlet mellett tehát kezdetben szükség van néhány olyan fogalomra, amelyeket nem definiálunk, s néhány olyan tételre, amelyeket nem bizonyítunk. Ez így elég ijesztően hangzik. Ha egy fogalmat nem definiálunk, akkor hogyan lehetünk biztosak abban, hogy mindenki ugyanazt érti alatta, s ha egy tételt nem bizonyítunk be, akkor honnan tudjuk, hogy felhasználása során nem jutunk ellentmondásokhoz? Nos, először is a matematika évezredes története során felgyülemlett tapasztalatokat természetesen felhasználhatjuk, ha a fogalmakat és a tételeket nem is. Másrészt, a nem definiált, úgynevezett alapfogalmak csak arra szolgálnak, hogy nevük legyen, az közömbös, hogy ki mit képzel a nevek mögé, hiszen a nem bizonyított tételek, az úgynevezett axiómák pontosan azt fogják rögzíteni, hogy ezekkel az alapfogalmakkal mit lehet csinálni. Az axiómák valójában az alapfogalmak tulajdonságai, az alapfogalmak pedig olyan „dolgok", amik az axiómáknak eleget tesznek, az axiómákkal leírt tulajdonságokkal rendelkeznek.

Az axiomatizálás a XX. század kezdetén a matematikai filozófia középpontjába került. *Russell* és *Whitehead* megírták monumentális művüket, „A matematika alapjai"-t. Ebben megkísérelték a teljes matematika felépítését axiomatikus módon, logikai alapelvekre helyezni. *Hilbert* a századfordulón a matematikustársadalom számára alapvető problémákat fogalmazott meg, s azok megoldását tűzte ki célul. Szerinte a matematikafilozófia feladata az axiómarendszerek ellentmondásmentességének, teljességének és függetlenségének vizsgálata. Más szavakkal ez azt jelenti, hogy az aritmetikának, mely a „természetes" matematika alapja, olyan axiómarendszert kell találni, amelyből nem lehet ellentmondást levezetni, valamint ebben az axiómarendszerben megfogalmazható bármely állítást, vagy annak tagadását be lehet bizonyítani. Kissé emelkedettebben fogalmazva: az aritmetika axiómarendszerében megtestesített világnak megismerhetőnek kell lennie. Ez egyrészt az axiómarendszerrel, másrészt viszont az általa megformált világgal szemben is súlyos követelmény! Ugyanakkor azt a kérdést is felveti, hogy vajon az axiómák lefektetésével egyidejűleg máris kijelöltük világunk határait? Annyi a világ, amennyi az általunk megválasztott axiómákba „belefér", amennyi belőlük kihámozható? Az axiómarendszerek által megformált „világok" az úgynevezett modellek. Ha egy axiómarendszernek van modellje, akkor – legalábbis – ellentmondásmentes, hiszen „megvalósítható". Ez az úgynevezett Igazság Tétel. A mi szempontunkból sokkal nagyobb jelentőségű ennek megfordítása, a Teljességi Tétel, mely szerint ha egy megfelelő nyelven megfogalmazott axiómarendszerben egy tétel az axiómarendszer minden modelljében igaz, akkor ez a tétel az axiómarendszerben bebizonyítható, az axiómákból logikai úton levezethető. Ennek az alapvető fontosságú tételnek, amely nem annyira az axiómarendszernek, hanem inkább levezetési szabályrendszerünknek a teljességét mutatja, tehát ennek a tételnek az olvasásakor az a benyomásunk támad, hogy az alapkérdésünkre kaptunk választ: a világ megismerhető, hiszen minden igaz tételt be lehet bizonyítani! Amikor 1929-ben *Gödel* ezt a tétel igazolta, akkor azt is kimutatta, hogy egy ilyen bizonyítást valójában egy alkalmas számítógép is el tud végezni, véges sok lépésben, tehát megismerésünk folyamata mintegy gépesíthető. Csend lett, megnyugvás.

Hamar kiderült azonban, hogy vihar előtti ez a csend. 1931-ben ugyanis ismét Gödel volt az, aki rátalált a modern matematikafilozófia legnagyobb eredményeire, az Első és Második Nemteljességi Tételre, melyek csapást mértek mindenféle korábban hangoztatott megalapozási elvre. Gödel első tétele szerint minden ellentmondásmentes, a természetes számok elméletét tartalmazó formálisaxiomatikus elméletben megfogalmazható olyan állítás, amely se nem bizonyítható, se nem cáfolható. Tehát mindig felvethető az adott nyelven olyan értelmes probléma, amely az adott ismeretekkel nem oldható meg! Az adott világnak mindig van olyan szelete, amit nem ismerhetünk meg! *Bolyai János* látnokként előzte meg korát, amikor felismerte, hogy egy ilyen egyidejűleg bizonyíthatatlan és cáfolhatatlan állítást, vagy akár tagadását nyugodt lelkiismerettel az axiómarendszerhez csatolhatja, ezzel „a semmiből egy újj más világot" teremtve, hiszen ettől biztosan nem keletkezhet ellentmondás, ha addig nem volt. Röviden, az Első Nemteljességi Tétel szerint egy valamirevaló matematikai elmélet soha nem lehet teljes abban az értelemben, hogy benne minden felvethető kérdésre választ lehessen adni.

Ám Gödelnek még ez sem volt elég, még mindig volt mondanivalója. Második Nemteljességi Tétele halálos döfést helyezett el a Hilbert–féle program testén: ellentmondásmentes, a természetes számok elméletét tartalmazó formálisaxiomatikus elméletben az „ez az elmélet ellentmondásmentes" mondatnak megfelelő formalizált állítás nem bizonyítható. A legegyszerűbb esetben ez azt jelenti, hogy az aritmetikának, mindenfajta matematikai vizsgálat alapelméletének ellentmondásmentességét nem lehet aritmetikai eszközökkel bebizonyítani. Mi, matematikusok ingoványon ropjuk táncunkat, mely ki tudja, mikor nyel el bennünket!

Remegő gyomorral próbáljuk meg összefoglalni, hogy mire jutottunk. Az Igazság Tétel szerint az „igaz" az, ami megvalósítható. A Teljességi Tétel szerint ami igaz, az bebizonyítható, van bizonyítása, érdemes tehát matematikusok hadának éjt nappallá téve keresni a levezetést, akár korunk egyszerű gépét, a számítógépet is csatasorba állítva, hiszen – a fentiek szerint – az is képes kell hogy legyen annak a néhány formális lépésnek a megtételére. Ez azt sejteti, hogy a világ, legalábbis ebben az értelemben igenis megismerhető: az igazságra fény deríthető, kristálytisztán bizonyítható. Vagy mégsem? Az Első Nemteljességi Tétel szerint minden valamirevaló axiómarendszerben értelmezhető fogalmak között van olyan, aminek számunkra felderíthetetlen tulajdonságai vannak: Janus–arcán kiismerhetetlen mosoly, mely egyes modellekben őszinte és igaz, másokban viszont hamis és csalfa, kisiklik kezünkből. Végül, ami a legfájóbb: a Második Nemteljességi Tétel azt mondja, hogy magának a szóbanforgó axiómarendszernek az ellentmondásmentessége éppen egy ilyen megfoghatatlan, kiismerhetetlen tulajdonság! Éppen az, amire a leginkább kiváncsiak volnánk! Így, ha egy nem teljesen együgyű világot építünk magunk köré, akkor azt soha nem ismerhetjük meg teljesen, pont a legkívánatosabb részeihez nem férhetünk hozzá – érdemes egyáltalán kutatni? Amikor egy matematikai problémán töprengek nappalokon-éjszakákon át, mindent bevetve, mindent megpróbálva, akkor vajon nem egy ilyen szellemi Minótaurusz kijárat nélküli labirintusában tévelygek?

Akkor hát megismerhető a világ, vagy sem? Milyen következtetést vonhatunk le a fentiekből? Hiszen már az is a világ jobb megismerését jelenti, hogy korlátainkról tudást szerezhetünk, nemde? A Matematika alázatosan, lehajtott fővel képes magába tekinteni, önhittség nélkül beismerve: „Tudom magamról, hogy porszem vagyok." Ám azt is megtudhattuk, hogy axiómarendszerünk egy eldönthetetlen állításába ütközve útelágazáshoz érkezünk: azt, vagy tagadását az axiómarendszerhez csatolva egyaránt konzisztens elméleteket, érvényes világokat kapunk, s ezzel tudásunk bővül. A fenti tételek csak azt állítják, hogy a szörnyet saját barlangjában nem győzhetjük le, ám barlangjából kicsalva a fényre már nem bújhat el előlünk. Egy erősebb elmélet keretein belül választ kaphatunk kérdésünkre. Szeretett aritmetikánkra visszatérve: *Gentzen* 1936-ban transzfinit, tehát aritmetikán kívüli eszközökkel bebizonyította az aritmetika ellentmondásmentességét. Mi más, ha nem ez a folyamat maga a megismerés, melynek során világunk bővül, de a megismerés eszköztára is gazdagodik, fegyverarzenálunk újabb magaslatok bevételére tesz képessé bennünket? Ebben a harcban nincs végső győzelem, de fegyverletétel sincs: "A cél halál, az élet küzdelem, S az ember célja e küzdés maga."

(Kutatók Éjszakája, Debrecen, 2014. szeptember 26.)