KONVOLÚCIÓ TÍPUSÚ FÜGGVÉNYEGYENLETEK

Székelyhidi László

Bevezetés

Diszkrét Abel–csoportokon értelmezett konvolúció típusú függvényegyenletek és függvényegyenlet rendszerek gyakran fellépnek a legkülönbözőbb vizsgálatok során. Számos klasszikus függvényegyenlet ekvivalens egy konvolúció típusú függvényegyenletrendszerrel, vagy egyszerű módon ilyenre redukálható. A konvolúció típusú függvényegyenletek vizsgálata visszavezethető eltolásinvariáns függvényterek vizsgálatára. Ezen vizsgálatok egyik célja az eltolásinvariáns függvényterek bizonyos osztályainak leírása, mely a spektrálszintézis központi problémája. Ebben a dolgozatban konvolúció típusú függvényegyenletrendszerekkel foglalkozunk, s megmutatjuk, hogy ezek vizsgálatára miként használhatók a spektrálszintézis módszerei.

Konvolúció típusú függvényegyenletek

Ebben a dolgozatban $\mathbb{C}$ jelöli a komplex számok halmazát. Ha G egy Abel–csoport, akkor G-nek a komplex számok additív csoportjába való homomorfizmusait *additív függvényeknek*, a zérustól különböző komplex számok multiplikatív csoportjába való homomorfizmusait pedig *exponenciális függvényeknek* nevezzük. Additív és exponenciális függvények szorzatai az *exponenciális monomok.* Mivel exponenciális függvények szorzata is exponenciális függvény, így az exponenciális monomok általános alakja

$$x \mapsto a_1(x)^{\alpha_1} a_2(x)^{\alpha_2} \ldots a_n(x)^{\alpha_n} m(x),$$

ahol $a_1, a_2, \ldots, a_n$ additív függvények, m exponenciális függvény, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ pedig nem negatív egész számok. Megjegyezzük, hogy az ilyen kifejezésekben a $0^0 = 1$ megállapodással élünk.

A G Abel–csoporton értelmezett összes komplex értékű függvények halmazát $\mathcal{C}(G)$ jelöli. A pontonkénti vektortér-műveletekkel és a pontonkénti konvergencia topológiájával ellátva $\mathcal{C}(G)$ lokálisan konvex topologikus vektortér. Ennek duálisa azonosítható az összes, G-n értelemezett, komplex értékű, véges tartójú mértékek $\mathcal{M}_c(G)$ terével, illetve, az összes, G-n értelmezett, komplex értékű, véges tartójú függvények terével.

A $\mathcal{C}(G)$ tér egy zárt, eltolásinvariáns alterét *varietásnak* nevezzük. Például, bármely $\mathcal{C}(G)$-beli f függvény esetén az f eltoltjai által kifeszített zárt altér egy varietás, melyet *az f által generált varietásnak* nevezünk. Egy másik fontos példát szolgáltat az a $V(\lambda)$ varietás, amely az adott λ véges tartójú mérték esetén az összes olyan $\mathcal{C}(G)$-beli f függvényből áll, melyekre teljesül az $f * \lambda = 0$ egyenlet. Ezt az egyenletet *a λ mértékhez tartozó konvolúció típusú függvényegyenletnek* nevezzük, $V(\lambda)$-t

1991 *Mathematics Subject Classification.* Primary 39B40; Secondary 39B50.

pedig *a λ által generált varietásnak.* Mivel varietások metszete nyilván ugyancsak varietás, ezért ha Λ véges tartójú komplex mértékek egy tetszőleges halmaza, akkor mindazon $\mathcal{C}(G)$-beli f függvények $V(\Lambda)$ halmaza, melyek minden Λ-beli λ esetén eleget tesznek az $f * \lambda = 0$ egyenletnek, ugyancsak varietást alkotnak, s ezt *a Λ által generált varietásnak* nevezzük. Ilyenkor az

$$f * \lambda = 0, \qquad \lambda \in \Lambda$$

egyenletrendszert *a Λ-hoz tartozó konvolúció típusú függvényegyenletrendszernek* nevezzük, a $V(\Lambda)$ varietást pedig ezen egyenletrendszer *megoldásterének.* Ismeretes (ld. [3], Lemma 8.1.), hogy minden varietás valamely konvolúció típusú függvényegyenletrendszer megoldástere. Valóban, adott V varietás esetén a V halmaz Λ *annihilátora*, tehát az összes, V-n eltűnő, véges tartójú, komplex mértékek halmazához tartozó konvolúció típusú függvényegyenletrendszer megoldástere éppen V.

A spektrálszintézis alapproblémája varietásokkal kapcsolatban a következő: mennyire határozzák meg a varietásokat a bennük található exponenciális monomok? Egy varietáshoz tartozó összes exponenciális függvények halmazát *a varietás spektrumának* nevezzük, míg a varietáshoz tartozó összes exponenciális monomok halmazát *a varietás spektrálhalmazának.* A spektrálszintézis alapproblémája így fogalmazható: adott varietás spektrálhalmazának lineáris burka sűrű-e a varietásban? Ha igen, akkor azt mondjuk, hogy *a varietásra spektrálszintézis érvényes.* Ha a G Abel–csoport minden varietására spektrálszintézis érvényes, akkor azt mondjuk, hogy *a G csoporton spektrálszintézis érvényes.* A következő tétel M.Lefranc eredménye (ld. [2]).

Tétel Minden végesen generált diszkrét Abel–csoporton spektrálszintézis érvényes.

Az [1] dolgozatban hasonló tétel szerepel tetszőleges Abel–csoportokra, ám a tétel bizonyítása hibás, illetve nem teljes. Tetszőleges Abel–csoportokra a spektrálszintézis probléma mindmáig megoldatlan. Azonban kiderült, hogy a spektrálszintézis konvolúció típusú függvényegyenletrendszerekre való alkalmazásai során számos esetben a probléma visszavezethető a végesen generált csoportok esetére. A következőkben konvolúció típusú függvényegyenletrendszerek egymással, illetve a spektrálszintézissel való kapcsolatait vizsgáljuk.

Konvolúció típusú függvényegyenletrendszerek ekvivalenciája

Legyen G Abel–csoport, Λ és Γ pedig a G-n értelmezett, véges tartójú, komplex mértékek két halmaza. Akkor mondjuk, hogy Λ *implikálja* Γ*-t*, ha $V(\Lambda)$ részhalmaza $V(\Gamma)$-nak. Másszóval, a Λ-hoz tartozó konvolúció típusú függvényegyenletrendszer minden megoldása megoldása a Γ-hoz tartozó konvolúció típusú függvényegyenletrendszernek. Akkor mondjuk, hogy Λ *és* Γ *ekvivalensek*, ha kölcsönösen implikálják egymást, tehát a hozzájuk tartozó konvolúció típusú függvényegyenletrendszereknek ugyanazok a megoldásaik. Adott Λ halmaz esetén a $V(\Lambda)$ varietás spektrálhalmazát *a Γ halmaz spektrálhalmazának* nevezzük.

Legyen G Abel–csoport, H a G egy részcsoportja, Λ pedig G-n értelmezett, véges tartójú, komplex mértékek egy halmaza. A Λ *halmaz* H*-ra való szűkítése*, melyet Λ_H jelöl, mindazon Λ-beli mértékek halmaza, melyek tartója H-nak részhalmaza.

való szűkítése implikálja Γ-nak ugyanazon részcsoportra való szűkíté sét, akkor Λ implikálja Γ-t.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy a tétel feltételei mellett Λ nem implikálja Γ-t. Ekkor $V(\Lambda)$ nem része $V(\Gamma)$-nak, így van olyan f függvény $V(\Lambda)$-ban, amely nem tartozik $V(\Gamma)$-hoz. Másszóval,

$$f * \lambda = 0$$

teljesül minden Λ-beli λ esetén, ugyanakkor

$$f * \gamma_0 \neq 0$$

valamely Γ-beli γ_0 mellett. Tehát van a G csoportnak olyan x_0 eleme, hogy

$$(f * \gamma_0)(x_0) \neq 0.$$

Jelölje H a G csoportnak a γ_0 tartója és az x_0 elem által generált részcsoportját. Világos, hogy az f függvény H-ra való $f|_H$ szűkítése beletartozik $V(\Lambda_H)$-ba. Másrészt,

$$(f|_H * \gamma_0)(x_0) = (f * \gamma_0)(x_0) \neq 0,$$

és γ_0 a Γ_H-hoz tartozik, így $f|_H$ nem eleme $V(\Gamma_H)$-nak. Ez azt jelenti, hogy Λ_H nem implikálja Γ_H-t, ami ellentmondás.

Az ekvivalencia fogalmát felhasználva azonnal adódik a következő tétel.

Következmény Legyen G Abel–csoport, Λ és Γ pedig a G-n értelmezett, véges tartójú, komplex mértékek két halmaza. A Λ és Γ akkor és csak akkor ekvivalensek, ha bármely végesen generált részcsoportra való szűkítéseik ekvivalensek.

Konvolúció típusú függvényegyenletrendszerek implikációja és ekvivalenciája a spektrálhalmazok segítségével is jellemezhető, amint azt az alábbi eredmények mutatják.

Tétel Legyen G végesen generált Abel–csoport, Λ és Γ pedig a G-n értelmezett, véges tartójú, komplex mértékek két halmaza. A Λ akkor és csak akkor implikálja Γ-t, ha Λ spektrálhalmaza részhalmaza Γ spektrálhalmazának.

Bizonyítás A feltétel szükségessége nyilvánvaló. Az elegendőség bizonyításához tételezzük fel, hogy bármely $V(\Lambda)$-beli exponenciális monom $V(\Gamma)$-hoz tartozik. Ekkor a $V(\Lambda)$-beli exponenciális monomok által generált V varietás is része $V(\Gamma)$-nak. Viszont végesen generált Abel–csoportokra spektrálszintézis érvényes, így $V = V(\Lambda)$, s ezzel a tételt igazoltuk.

A tétel kézenfekvő következménye az alábbi eredmény.

Következmény Legyen G végesen generált Abel–csoport, Λ és Γ pedig a G-n értelmezett, véges tartójú, komplex mértékek két halmaza. A Λ és Γ akkor és csak akkor ekvivalensek, ha spektrálhalmazaik azonosak.

Ezekből az eredményekből látható, hogyan lehet egy tetszőleges Abel–csoporton értelmezett két konvolúció típusú függvényegyenletrendszer egymáshoz való viszonyát vizsgálni, vagyis, hogyan lehet eldönteni azt a kérdést, hogy egyikük implikálja-e a másikat? Elegendő ugyanis az egyenletrendszerek végesen generált részcsoportokra való szűkítéseiről eldönteni ugyanezt, ez pedig a spektrálhalmazok meghatározásával

Konvolúció típusú függvényegyenletrendszerek és spektrálszintézis

Az előző szakaszban ismertetett eredmények a következő, természetes módon általánosíthatók.

Tétel Legyen G Abel–csoport, melyen spektrálszintézis érvényes, Λ és Γ pedig a G-n értelmezett, véges tartójú, komplex mértékek két halmaza. A Λ akkor és csak akkor implikálja Γ-t, ha Λ spektrálhalmaza részhalmaza Γ spektrálhalmazának.

Következmény Legyen G Abel–csoport, melyen spektrálszintézis érvényes, Λ és Γ pedig a G-n értelmezett, véges tartójú, komplex mértékek két halmaza. A Λ és Γ akkor és csak akkor ekvivalensek, ha spektrálhalmazaik azonosak.

Végül megmutatjuk, hogy a fenti tétel következő megfordítása is érvényes.

Tétel Legyen G Abel–csoport, és tételezzük fel, hogy G-n értelmezett, véges tartójú, komplex mértékek bármely Λ és Γ halmazai esetén, ha Λ spektrálhalmaza része Γ spektrálhalmazának, akkor Λ implikálja Γ-t. Ekkor G-n spektrálszintézis érvényes.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy G-n nem érvényes spektrálszintézis. Ez azt jelenti, hogy van olyan V varietás $\mathcal{C}(G)$-ben, melyben található exponenciális monomok lineáris burkának V_0 lezártja a V-ben valódi részvarietás. Ekkor a V spektrálhalmaza része V_0 spektrálhalmazának (valójában egyenlő vele), így a feltevés szerint V része V_0-nak, azaz, $V = V_0$, s ez ellentmondás.

Irodalom

1. Elliot, R.J., *Two notes on spectral synthesis for discrete Abelian groups*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **61** (1965), 617–620.
2. Lefranc, M., *L'analyse harmonique dans* $\mathbb{Z}^n$, C.R. Acad. Sci. Paris **246** (1958), 1951–1953.
3. Székelyhidi, L., *Convolution Type Functional Equations on Topological Abelian Groups*, World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong, 1991.

Debreceni Egyetem Természettudományi Karok
Matematikai és Informatikai Intézet
Analízis Tanszék
H-4032 Debrecen, Egyetem tér 1.
E-mail address: szekely@math.klte.hu