

HALMAZOK ÉS FÜGGVÉNYEK

Székelyhidi László

„Híd a felsőbb matematikához”

Jelen kiadvány a Palotadoktor Bt. gondozásában készült. A munkát lektorálta:

Vinczéné Varga Adrienn (Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet)

Lovas Rezső (Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet)

Előállította: Palotadoktor Bt.

Copyright © Székelyhidi László. A mű a szerző szellemi terméke, melyet engedély nélkül tilos sokszorosítani.

ELŐSZÓ

A felsőfokú matematika tanítása az elmúlt évek során végbement változások eredményeképpen a korábbiakhoz képest jelentősen más irányt vett. A manapság divatos BSc, illetve MSc képzés együttese kellene, hogy legalább ugyanazt a tudást nyújtsa, mint korábban a hagyományos négy-, illetve ötéves tanulmányok, amelyek hatékonyak és sikeresnek bizonyultak, amint azt példák sokasága bizonyítja: a magyar matematika világhatalomnak számított. Ma gyakran különböző, általában nem a matematikán belülről kiinduló olyan kezdeményezéseknek vagyunk tanúi, hogy a matematikához és a matematika oktatásához dokumentálhatóan kiválóan értő elmék véleményének figyelmen kívül hagyásával valahol valakik eldöntik, hogy ami eddig így ment, az nem volt jó, vagy nem volt elég jó, így külső kényszerek vagy belső indíttatások hatására, alkalmazkodva az élet egyéb területein is végbemenő globalizálódási folyamatokhoz, hatalmuknál fogva kikényszerítik, hogy hagyjunk fel a jól bevált módszerekkel, s – legtöbbször sajnos előkészítetlenül, egyfajta „reformdüh” által elvakítottan – kezdjünk el olyasmivel kísérletezni, amiről még sehol, soha nem bizonyosodott be, hogy jobb, mint a korábbi, mindenesetre más, és „pont olyan, mint...”, igen, látszólag „pont olyan, mint...”, de azért mégsem teljesen, hiszen a világ különböző tájain egészen más módon szocializálódott, máshoz szokott, mást szerető emberek élnek, akikre azonos sémák alkalmazása elméletileg lehetséges, de gyakorlatilag biztosan nem.

Az mindenesetre tény, hogy manapság – nem tudni, meddig – a matematika felsőfokú oktatása két szinten zajlik: a második szintre már csak bizonyos, valamilyen szempontok szerint kiválasztottak juthatnak el, míg az első szint elvégzése egy leendő tanár számára szinte semmit nem jelent. Azaz, valamit mégis: megkísérrelheti a bejutást a második szintre, amelynek sikeres teljesítése után lényegében hasonló képesítést, diplomát, oklevelet szerez, mint azok, akik korábban ugyanezt a két szint szétválasztása nélkül, avatott tanárok, tudósok munkájával kialakított egyéges folyamat lezárásával elérték.

Az Olvasóban az az érzés alakulhat ki a fentiek olvastán, hogy személy szerint nekem erős ellenérzéseim vannak ezekkel a módszerekkel szemben. Nos, ez az érzés nem alaptalan. Hiszen, ha egy rendszer jó működésére számtalan bizonyíték áll rendelkezésre, míg az újfajta kísérletezésnek még csak meg sem lehet jósolni a kimenetelét, akkor józanul gondolkodó ember nyilván idegenkedik az utóbbtól. Ám kénytelen elfogadni, sőt, alkalmazkodni hozzá. Erre teszek kísérletet jelen munkámban, illetve a folytatásaként tervezett – részben már ugyancsak készenlétben várakozó – írásokban, jegyzetekben.

Jelenleg – legalábbis az ország egyik patinás intézményében, a Debreceni Egyetemen – a BSc képzésben részt vevő hallgatók négy szemeszter matematikai analízist kell, hogy teljesítsenek. Ezek a következők: „Halmazok és függvények”, „Bevezetés az analízisbe”, „Differenciál- és integrálszámítás”, s végül „Többváltozós függvények analízise, differenciálegyenletek”. Mindig a kezdet a legnehezebb, s értelemszerűen jelen munka az első tárgyhöz kíván segítséget

nyújtani oktatóknak, hallgatóknak egyaránt. Ezt az elméleti munkát egy feladatgyűjtemény, valamint egy, a feladatgyűjteményben szereplő feladatok jelentős részének részletes megoldását tartalmazó „megoldásgyűjtemény” fogja követni – reményeim szerint a közeli jövőben. Hasonló szerkezetet kívánok kialakítani a másik három tárggyal kapcsolatban, melyek jelentős része már félig kész, „lefagyasztott” állapotban van. Szerencsére a matematika csodálatos építményének azok a részei, amelyek az alapokat jelentik, nem változnak olyan sebességgel, mint az oktatásunkat irányító politikusok elképzelései.

Ez a könyvecske – amint alcíme is mutatja – annak a szakadéknak az áthidalásához kíván kapaszkodót nyújtani, ami a középiskolai és a felsőfokú matematika között – tagadjuk bár, vagy nem – létezik. Ennek megfelelően – reményeim szerint – haszonnal forgathatják mindazok, akik már középiskolai végzésükhöz közeledve érdeklődést tanúsítanak az iránt, hogy esetleg ezen a területen folytassanak felsőfokú tanulmányokat. Olyan dolgokról van benne szó, amelyek ma a modern matematika elemeit képezik – de néha erősen támaszkodva arra a meghatározhatatlan képre, érzésre, ami egy matematika iránt érdeklődő, gondolkodni szerető és akaró emberke agyában megfogalmazódhat, de a középiskolában világos választ még nem kaphat, ám hajlandó idejét, energiáját és képzelőerejét rászánni arra, hogy tüzetesen végigtanulmányozza ezt az írást. Sok ismerős dologra fog bukkanni, néha majd meglepetéssel veszi tudomásul, hogy „Jé, ez ezt jelenti. . .”, de remélem, hogy a könyv mellett, hogy bizonyos ismétlés és összefoglalás szükségességére is rámutat, ugyanakkor megajándékozza figyelmes és alázatos olvasóját a felfedezés örömeivel. Mindez azokra is vonatkozik, akik már évekkorábban szereztek a matematika középiskolai tanítására feljogosító okmányt, s most megnyílt előttük a lehetőség, hogy ennek az okmánynak a birtokában az MSc képzéshez csatlakozzanak. Tudom, hogy nekik nem sok újat tudok itt mondani, de azt is tudom, hogy azért ők is találnak újdonságokat ebben az írásban.

A könyvecske elkészítésében nélkülözhetetlen segítséget nyújtott Vinczéné Varga Adrienn kollégám, aki ifjú kora ellenére sokak számára irigyelhető középiskolai tanári érzékkal rendelkezik, valamint másik fiatal kollégám, Lovas Rezső, akinek éleslátása nélkül ez a könyv hibák és elírások magasztos gyűjteménye lenne. Ők a könyv lektorai – őszintén köszönöm időt és fáradságot nem kímélő segítségüket.

„Híd a felsőbb matematikához”. Mint tudjuk, oda „nem vezet királyi út”, aki oda fel akar jutni, a magaslatra, hogy onnan szétnézve lássa azt a sok érdeklődő tekintetet, akiknek még a ki sem mondott kérdéseire is választ akar majd adni a sokak által csak szitokszóként kezelt „matematikaórán”, az megtesz mindent ennek érdekében, még talán ezt az írást is áttanulmányozza, és tudni fogja, hogy megérte. Nos, könyvecskémel s a tervezett sorozat többi darabjával ehhez szeretnék lehetőségeimhez mérten hozzájárulni.

Hegyeshalom, 2008.

Székelyhidi László

TARTALOM	3
----------	---

Tartalom

ELŐSZÓ	1
1 A MATEMATIKA ALAPJAI	5
1.1 Az axiomatikus módszer	5
1.2 Logikai formulák, következtetések	7
1.3 Indirekt bizonyítás, tétel megfordítása	10
1.4 A halmazelmélet alapjai	12
1.5 Műveletek halmazokkal	17
2 A SZÁMFOGALOM	25
2.1 A természetes számok	25
2.2 Műveletek a természetes számok halmazában	27
2.3 A természetes számok rendezése	31
2.4 Az egész számok	33
2.5 Az egész számok rendezése	39
2.6 Az egész számok hatványozása	40
2.7 A racionális számok	41
2.8 A racionális számok hatványozása	48
2.9 A valós számok halmaza	51
2.10 A valós számok teljessége	56
2.11 A valós számok hatványozása	59
2.12 A valós számok további tulajdonságai	64
2.13 A logaritmus és tulajdonságai	69
2.14 A komplex számok	73
2.15 Középek és egyenlőtlenségek	81
3 A FÜGGVÉNYTAN ELEMEI	85
3.1 Függvények	85
3.2 Inverz függvény	87
3.3 Összetett függvény	89
3.4 Számosságok	92
3.5 Valós függvények	99
3.6 Néhány egyszerű függvény	102
3.7 Valós függvények alaki tulajdonságai	105
3.8 Hatványfüggvények	109
3.9 Polinomok	112
3.10 Exponenciális függvények	114
3.11 Logaritmusfüggvények	115
3.12 Trigonometrikus függvények	117
3.13 Inverz trigonometrikus függvények	125

4	EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK	130
4.1	Megoldáshalmazok	130
4.2	Lineáris egyenletek	133
4.3	Másodfokú egyenletek	134
4.4	Magasabbfokú egyenletek	136
4.5	Abszolút értékkel kapcsolatos egyenletek	140
4.6	Gyökös egyenletek	142
4.7	Exponenciális egyenletek	143
4.8	Logaritmusos egyenletek	145
4.9	Trigonometrikus egyenletek	147
4.10	Egyenlőtlenségek	151
4.11	Lineáris egyenlőtlenségek	153
4.12	Másodfokú egyenlőtlenségek	153
4.13	Törtés egyenlőtlenségek	154
4.14	Gyökös egyenlőtlenségek	156
4.15	Exponenciális és logaritmusos egyenlőtlenségek	157
4.16	Trigonometrikus egyenlőtlenségek	159