

ERDŐS JENŐ

VÁLOGATOTT ELŐADÁSAI

ERDŐS JENŐ

válogatott előadásai

Székelyhidi László

DEBRECENI EGYETEM
MATEMATIKAI INTÉZET
2005.

Jelen kiadvány az Universitas Alapítvány, valamint a Debreceni Egyetem
Matematikai Intézetének és Informatikai Karának Doktori Iskolája
támogatásával készült.

© Székelyhidi László

Tartalom

ELŐSZÓ	7
2 TELJESEN REDUCIBILIS ENDOMORFIZMUSGYŰRŰK	11
2.1 FÉLCSOPORT, ABEL-C SOPORT	11
2.1.1 Félcsoportok	11
2.1.2 Abel-csoportok	12
2.2 A GYŰRŰK ÉS MODULUSOK ELMÉLETÉNEK ALAPJAI	15
2.2.1 A gyűrű fogalma, egységelemes gyűrűk	15
2.2.2 Gyűrűk reprezentációjának fogalma	15
2.2.3 A modulus fogalma	16
2.2.4 Részmodulusok és faktormodulusok	18
2.2.5 Direkt összegek és direkt szorzatok	20
2.2.6 Modulusok endomorfizmusgyűrűi	23
2.3 TELJESEN REDUCIBILIS MODULUSOK	26
2.3.1 Teljesen reducibilis modulusok szerkezete	26
2.3.2 Endomorfizmusok zárt, teljesen reducibilis gyűrűi	30
2.4 TELJES REDUCIBILITÁSSAL KAPCSOLATOS GYŰRŰOSZTÁLYOK	37
2.4.1 Primitív és félig primitív gyűrűk	37
2.4.2 Gyűrűk radikáljai	38
2.4.3 Gyűrűk, amelyek felett minden modulus teljesen re- ducibilis	41
3 A C^*-ALGEBRÁK ELMÉLETÉNEK KÉT ALAPTÉTELE ÉS HÁTTERŰK	47
3.1 TOPOLOGIKUS TEREK	47
3.1.1 Alapfogalmak	47
3.1.2 Teljesen reguláris és normális terek	48
3.1.3 Kompakt terek	50
3.2 LINEÁRIS TEREK	52
3.2.1 Lineáris terek szerkezete	52
3.2.2 Lineáris funkcionálok terei	54
3.3 NORMÁLT TEREK	56
3.3.1 Alapfogalmak	56
3.3.2 Korlátos lineáris funkcionálok terei	57
3.3.3 Banach-terek	60

3.3.4	Hilbert–terek	63
3.4	ALGEBRÁK	68
3.4.1	Alapfogalmak	68
3.4.2	Függvényalgebrák	70
3.4.3	Lineáris operátorok algebrái	72
3.5	NORMÁLT ALGEBRÁK	75
3.5.1	Alaptulajdonságok	75
3.5.2	Az elemek spektruma	77
3.5.3	A Gelfand– reprezentáció	80
3.5.4	Kommutatív C^* -algebrák	81
3.5.5	Nem kommutatív C^* -algebrák	85
4	KOMMUTATÍV CSOPORTOK	
	DUALITÁSELMÉLETE	91
4.1	HARMONIKUS ANALÍZIS VÉGES	
	ABEL-CSOPORTOKON	91
4.1.1	Karakterek	91
4.1.2	Duális csoport	93
4.1.3	Harmonikus analízis véges Abel–csoportokon	94
4.1.4	Konvolúció	96
4.2	INVARIÁNS KÖZEPEK ABEL–CSOPORTOKON	99
4.2.1	Közepék Abel–csoportokon	99
4.2.2	Invariáns közepék Abel–csoportokon	100
4.3	DISZKRÉT ÉS KOMPAKT ABEL–CSOPORTOK	
	DUALITÁSELMÉLETE	102
4.3.1	Karakterek diszkrét Abel–csoportokon	102
4.3.2	Karakterek kompakt Abel–csoportokon	103
4.3.3	Diszkrét Abel–csoportok dualitáselmélete	103
4.3.4	Konvolúciós operátorok kompakt Abel–csoportokon	105
4.3.5	Diszkrét és kompakt Abel–csoportok karakterelmélete	108
4.3.6	Elemi Abel–csoportok karakterelmélete	112
4.4	LOKÁLISAN KOMPAKT ABEL–CSOPORTOK	
	DUALITÁSELMÉLETE	115
4.4.1	Kompaktan generált lokálisan kompakt Abel– csoportok	115
4.4.2	A Pontrjagin–féle struktúratétel és a dualitástétel	120

ELŐSZÓ

Ez a jegyzet Erdős Jenő válogatott előadásait tartalmazza azok közül, amelyeket a 70-es években az akkor még Kossuth Lajos Tudományegyetem nevű intézmény Algebra Tanszékének docenseként tartott. Ezek a speciálkollégiumok – hála Erdős Jenő hallatlanul szuggesztív, kiváló előadási stílusának – nem csupán az átlagosnál felkészültebb, érdeklődőbb hallgatók számára voltak különösen érdekesek, ugyanis ezeken az összejöveteleken az akkori matematikai tanszékek oktatói közül is sokan rendszeres látogatónak számítottak. Én egyetemi hallgatóként csupán halmazelméleti előadásait hallgathattam, ám nagy híre volt a lineáris algebráról, illetve az algebráról tartott kurzusainak is. Legnagyobb öröömre már akkor személyes beszélgetéseket folytathattam vele a matematika legkülönbözőbb területeihez tartozó problémákról, s még ha ezeknek a beszélgetéseknek legtöbbször csupán passzív, bár ámuldozó szereplője voltam, mindig lenyűgözött Erdős Jenő hatalmas tudása, s az a könnyedség, amellyel képes volt hallgatóit ebbe a tudásvilágba bevezetni. Később kezdő, fiatal matematikusként, az Analízis Tanszék tanársegédjeként minden lehetőséget megragadtam, hogy Erdős Jenőnek bármilyen témájú előadását meghallgathassam. Nem mindig volt könnyű követni kérlelhetetlen okfejtését, ugyanis az volt az elve, hogy amit nem lehet egyszerűen, szavakkal, bonyolult jelek és rövidítések nélkül elmondani, az még nem kész matematika. Ezt az elvet még olyankor is következetesen alkalmazta, amikor kétségtelenül rövidebben kifejezhetette volna gondolatait egy-egy jel, formula segítségével, ám ezek használata nem biztos, hogy a valódi megértést segítette volna. Rendkívül érzékletes módon tudott mély dolgokat elmagyarázni, néha egy egyszerű, köznapi hasonlat, néha egy primitív rajzocska segítségével. Mindezt a matematika olyan elvont területeinek oktatása során is sikerült eredményesen alkalmaznia, mint a matematikai logika, a halmazelmélet, az algebra, a modellelmélet és az univerzális algebra.

Ebben a válogatásban Erdős Jenő három speciálkollégiumának anyagát gyűjtöttem össze. A válogatás majdnem teljesen önkényesen történt. Az egyetlen objektív tényező az volt, hogy ezeken az előadásokon hallgatóként olyan kézzel írt jegyzeteket sikerült készítenem, melyek alkalmasak arra, hogy a belőlük megfelelően szerkesztett anyag hűen tükrözze Erdős Jenő szemléletét, gondolatait, s mindazt, ami számunkra az ő előadásait különlegesen értékesé tette. Ráadásul abban a különös szerencsében volt részem, hogy a válogatásban második helyen szereplő ” *A C^* -algebrák elméletének két alaptétele és hátterük* ” című anyagot személyesen átnézte, s írott megjegy-

zéseivel is ellátta, mintegy "lektorálta", amikor megkérdeztem arról, hogy esetleg hozzájárulna-e ennek egy jegyzetben való megjelentetéséhez. Válasza kitérő volt ugyan ("... még sokat kellene dolgozni rajta ..."), de afelől megnyugtató, hogy megjegyzéseinek figyelembevételével nem ellenezné az anyag írott formában való közzétételét. Bár a végső hozzájárulást már nem adhatta meg, úgy gondolom, az a tény, hogy kéziratomat gondosan átnézte, beleegyezésnek tekinthető.

A válogatásban sorrendben elsőként szereplő " *Teljesen reducibilis endomorfizmusgyűrűk*" című anyag összeállításakor egy autentikus forrás felbukkanása révén ugyancsak váratlan szerencse segített: kiderült, hogy Losonczy László, aki maga is látogatója volt ennek a speciálkollégiumnak, annak idején elkérte Erdős Jenőtől az általa írt jegyzeteket, melyeket kézzel lemásolt, s ezekből a másolt anyagokból ennyi év után is sikerült jelentős mennyiséget megtalálnia. Bár ez csupán egy része a teljes speciálkollégium anyagának, az általam leírtakkal való tüzetes összehasonlítás révén azonban meggyőződhettem arról, hogy semmilyen lényeges eltérés nem csorbítja az eredeti gondolatokat.

Köszönettel tartozom kedves kollégáimnak, Járai Antalnak, Lakatos Piroskának, Losonczy Lászlónak, Molnár Lajosnak és Páles Zsoltnak, akik ezt az összeállítást gondosan átnézték, és értékes megjegyzéseikkel, tanácsaikkal nagymértékben hozzájárultak mielőbbi megjelenéséhez.

A fentiek alapján azzal a reménnyel bocsátom közre ezeket a jegyzeteket, hogy az olvasónak sikerül bepillantást nyernie abba a gyönyörű világba, amelyet a matematika ezen fejezeteiből Erdős Jenő megmutatott nekünk. Korai halála miatt már csak emlékezhetünk magával ragadó személyiségére, kiváló előadásaira, s arra a szuggesztivitásra, amelyet semmilyen leírt szó nem adhat vissza. Ám a betűk felejthetlenné teszik azt a kristálytiszta látásmódot és fogalmazást, azt a kedves könyörtelenséget, mellyel a matematika szeretetére tanított bennünket, s mindazokat, akik ebben a szerencsében részesülhettek.

Debrecen, 2005.

Székelyhidi László