

# DIFFERENCIÁL- ÉS INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

Székelyhidi László

„A felsőbb analízis útjain”

Jelen kiadvány a Palotadoktor Bt. kiadásában készült. A munkát lektorálta:  
Vajday László (Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet)

Felelős kiadó: Palotadoktor Bt.

2009.

Copyright © Székelyhidi László. A mű a szerző szellemi terméke, melyet engedély nélkül tilos sokszorosítani.

## ELŐSZÓ

Elérkeztünk immár jegyzetsorozatunk harmadik kötetéhez, melynek címe „Differenciál- és integrálszámítás”. Mottójául az szolgál, hogy „A felsőbb analízis útjain”, amely arra utal, hogy aki a „Halmazok és függvények” és „Bevezetés az analízisbe” című köteteken sikeresen átjutott, az megkezdheti sétáját a felsőbb analízis útjain. Az Olvasó sétája során az analízis leghatékonyabb eszköztárával, a differenciál- és integrálszámítással ismerkedhet meg. Az analízis ezen fejezetei rendkívül szerteágazó alkalmazásokkal rendelkeznek a fizika, kémia, biológia, a mérnöki tudományok és bizonyos társadalomtudományok különböző területein. Ebben a jegyzetben kizárólag egyetlen valós változótól függő függvények differenciál- és integrálszámításával foglalkozunk, a többváltozós függvények hasonló elméleteinek tárgyalására a sorozat következő kötetében kerül sor.

Az Olvasónak ajánljuk, hogy a jegyzetben bizonyítás nélkül szereplő állításokat igyekezzen önállóan bebizonyítani, amelynek során az anyagot mélyebben, jobban fogja megérteni.

Reméljük, hogy „A felsőbb analízis útjain” sétálva, s a differenciál- és integrálszámítás klasszikus eredményeit megcsodálva az Olvasó számára világossá válik, hogy a bevezető analízis korábban talán kissé absztraktnak tűnő módszerei miként válnak a hétköznapi részeivé, egyes tudományágak nélkülözhetelen segédeszközeivé.

Köszönetet mondok Vajday Lászlónak a jegyzet lelkiismeretes lektorálásáért.

Hegyeshalom, 2009.

Székelyhidi László

# Tartalom

|   |           |
|---|-----------|
| <b>ELŐSZÓ</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Valós függvények differenciálása</b>                   | <b>4</b>  |
| 1.1 Valós függvények differenciálhányadosa . . . . .        | 4         |
| 1.2 Differenciálhatóság és folytonosság . . . . .           | 6         |
| 1.3 Műveletek differenciálható függvényekkel . . . . .      | 7         |
| 1.4 Az összetett függvény differenciálása . . . . .         | 8         |
| 1.5 Az inverz függvény differenciálása . . . . .            | 10        |
| 1.6 Vektorértékű függvények differenciálása . . . . .       | 11        |
| 1.7 Geometriai alkalmazások . . . . .                       | 12        |
| 1.8 Fizikai alkalmazások . . . . .                          | 14        |
| 1.9 Differenciál . . . . .                                  | 15        |
| 1.10 Implicit differenciálás . . . . .                      | 18        |
| <b>2 A differenciálszámítás középértéktételei</b>           | <b>19</b> |
| 2.1 A középértéktételek . . . . .                           | 19        |
| 2.2 Magasabbrendű deriváltak . . . . .                      | 21        |
| 2.3 A l'Hospital-szabály . . . . .                          | 23        |
| 2.4 Függvénysorozatok differenciálása . . . . .             | 29        |
| 2.5 Függvénytörések differenciálása . . . . .               | 31        |
| 2.6 Az elemi függvények deriváltjai . . . . .               | 32        |
| <b>3 Függvényvizsgálat</b>                                  | <b>34</b> |
| 3.1 Monotonitás . . . . .                                   | 34        |
| 3.2 Szélsőérték . . . . .                                   | 35        |
| 3.3 Konvexitás, konkávitás . . . . .                        | 36        |
| 3.4 Inflexió . . . . .                                      | 39        |
| <b>4 Az elemi függvények vizsgálata</b>                     | <b>40</b> |
| 4.1 Az exponenciális függvény . . . . .                     | 40        |
| 4.2 A logaritmusfüggvény . . . . .                          | 41        |
| 4.3 A koszinusz függvény és inverze . . . . .               | 43        |
| 4.4 A szinusz függvény és inverze . . . . .                 | 44        |
| 4.5 A tangens függvény és inverze . . . . .                 | 46        |
| 4.6 A kotangens függvény és inverze . . . . .               | 47        |
| 4.7 A koszinusz hiperbolikus függvény és inverze . . . . .  | 49        |
| 4.8 A szinusz hiperbolikus függvény és inverze . . . . .    | 50        |
| 4.9 A tangens hiperbolikus függvény és inverze . . . . .    | 52        |
| 4.10 A kotangens hiperbolikus függvény és inverze . . . . . | 53        |
| 4.11 Két alkalmazás . . . . .                               | 55        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>5</b> | <b>Primitív függvény</b>  | <b>57</b> |
| 5.1      | A primitív függvény fogalma . . . . .                               | 57        |
| 5.2      | A primitív függvény meghatározása . . . . .                         | 57        |
| 5.3      | Az elemi függvények primitív függvényei . . . . .                   | 58        |
| 5.4      | Racionális függvények primitív függvénye . . . . .                  | 61        |
| <b>6</b> | <b>A Riemann-integrál</b>   | <b>64</b> |
| 6.1      | Az integrál értelmezése . . . . .                                   | 64        |
| 6.2      | Integrálható függvények osztályai . . . . .                         | 67        |
| 6.3      | Az integrál tulajdonságai . . . . .                                 | 69        |
| 6.4      | Integrálfüggvény. A Newton–Leibniz-formula . . . . .                | 72        |
| 6.5      | Függvénysorozatok és függvénysorok tagonkénti integrálása . . . . . | 74        |
| 6.6      | Improprius integrál . . . . .                                       | 75        |
| 6.7      | Kompakt tartójú folytonos függvények . . . . .                      | 77        |
| 6.8      | A Riemann-integrál néhány alkalmazása . . . . .                     | 80        |
| 6.9      | Vektorértékű függvények integrálása . . . . .                       | 81        |
| 6.10     | Görbék . . . . .  | 82        |