

BEVEZETÉS AZ ANALÍZISBE

Székelyhidi László

„A felsőbb matematika kapujában”

Jelen kiadvány a Palotadoktor Bt. kiadásában készült. A munkát lektorálta:
Lovas Rezső (Debreceni Egyetem, Matematikai Intézet)

Felelős kiadó: Palotadoktor Bt.

2009.

Copyright © Székelyhidi László. A mű a szerző szellemi terméke, melyet engedély nélkül tilos sokszorosítani.

ELŐSZÓ

Jegyzetsorozatunk első kötetének, a „Halmazok és függvények” címűnek mottója a következő volt: „Híd a felsőbb matematikához”. Jelen jegyzet mottójának azt választottuk, hogy „A felsőbb matematika kapujában”, ezzel azt is kifejezve, hogy aki áthaladt a hídon, az elérkezett a kapuba, melyet kitárva beléphet a felsőbb matematika, az analízis földjére. Jelen kiadványban ezt tesszük: a „Halmazok és függvények” című jegyzetből elsősorban a számfogalommal kapcsolatos ismereteket felhasználva lényegében felépítjük a valós analízis alapjait, a határérték és folytonosság elméletét. Esetenként komplex értékű sorozatokkal, illetve függvényekkel is foglalkozunk, de a tárgyalás lényegére a „valós” jelző lesz jellemző.

Az Olvasónak ajánljuk, hogy ahol erre utalás történik, igyekezzen önállóan megoldani problémákat, igazolni be nem bizonyított állításokat. Ez alapvetően fontos az anyag jobb megértése érdekében.

Bízunk benne, hogy „A felsőbb matematika kapujában” állva, illetve a kaput szélesre tárva az Olvasó részesévé válik annak a tudásnak és ismeretanyagának, amely nélkül ma a felsőbb matematika tanulmányozása nem lehetséges, amelynek birtokában viszont biztos talajon állva tekinthet előre, a felsőbb analízis további fejezetei felé.

Köszönetet mondok Lovas Rezsőnek a jegyzet lelkiismeretes lektorálásáért.

Hegyeshalom, 2009.

Székelyhidi László

Tartalom

ELŐSZÓ	1
1 Metrikus terek	4
1.1 A metrikus tér fogalma	4
1.2 Metrikus tér topológiája	8
1.3 Nyílt és zárt halmazok metrikus térben	10
1.4 Kompakt halmazok metrikus térben	15
1.5 Sorozatok	21
1.6 Konvergens sorozatok metrikus térben	23
1.7 Sorozatok torlódási pontja	26
1.8 Teljes metrikus terek	28
1.9 Metrikus terek szorzata	30
1.10 A valós számok halmaza mint metrikus tér	31
1.11 A bővített valós számok halmaza mint metrikus tér	33
2 Valós számsorozatok	35
2.1 Valós számsorozatok konvergenciája	35
2.2 Műveletek konvergens sorozatokkal	37
2.3 Monoton sorozatok	40
2.4 A Cauchy-féle konvergenciakritérium	40
2.5 Tágabb értelemben vett torlódási pont és határérték	41
3 Valós számsorok	44
3.1 Sorok konvergenciája	44
3.2 Műveletek sorokkal	46
3.3 Konvergenciakritériumok	49
3.4 Valós számok p -adikus előállítására	53
4 A határérték fogalma metrikus terekben	55
4.1 Függvény határértéke	55
4.2 Valós változós, valós értékű függvények határértéke	57
4.3 Határérték a bővített valós számok halmazában	57
4.4 Egyoldali határérték	58
4.5 Monoton függvények	59
4.6 Határérték a komplex számok halmazában	60
4.7 Határérték koordinátánként	61
4.8 Határérték és egyenlőtlenségek	61
4.9 Határérték és műveletek	62
5 A folytonosság fogalma metrikus terekben	64
5.1 Függvények pontbeli folytonossága	64
5.2 Folytonos függvények kompakt tereken	65
5.3 Egyenletesen folytonos függvények	67
5.4 A folytonosság és egyenletes folytonosság kapcsolata	68
5.5 Az összetett függvény és az inverz függvény folytonossága	69

5.6	Kontrakciók	69
5.7	Valós változós, valós értékű függvények folytonossága	71
5.8	Egyoldali folytonosság	72
5.9	Folytonosság és műveletek	73
5.10	Monoton függvények folytonossága	73
6	Függvénysorozatok, függvénysorok	75
6.1	Függvénysorozatok konvergenciája	75
6.2	Függvénysorok konvergenciája	76
6.3	Egyenletes konvergencia és folytonosság	78
6.4	Hatványsorok	80
7	Elemi függvények	83
7.1	Az elemi függvények	83
7.2	A valós exponenciális függvény	83
7.3	A valós logaritmusfüggvény	86
7.4	Az általános exponenciális függvény	86
7.5	Az általános logaritmusfüggvény	88
7.6	A trigonometrikus függvények	88
7.7	A hiperbolikus függvények	93
7.8	Nevezetes határértékek	95